

MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte **tódolos** alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álgebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Bloque 1 (Álgebra Lineal) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. Ache tódalas matrices $A = (a_{ij})$, cadradas de orde tres, tales que $a_{21} = a_{32} = 0$ e $A + A^t = 4I$, sendo I a matriz identidade de orde tres e A^t a matriz trasposta de A , das que ademáis sábese que o seu determinante vale 10.

2. Discuta e interprete xeométricamente, según os diferentes valores do parámetro m , o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ 4x - 2y + 2z = 2m \\ -3x - 2y + mz = -4 \end{cases}$$

Bloque 2 (Xeometría) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. Calcule a distancia entre as rectas de ecuacións $r : \left\{ x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7} \right\}$ e $s : \left\{ x-2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \right\}$.

2. Demostre que os puntos $P=(0,0,4)$, $Q=(3,3,3)$, $R=(2,3,4)$ e $S=(3,0,1)$ son coplanarios e determine o plano que os contén.

Bloque 3 (Análise) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. **A.** Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral para funcións continuas.

B. Sexa $f : [-2, 2] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continua en $[-2, 2]$ tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt$, ¿pódese asegurar que existen b e c en $[-2, 2]$ tales que $b \leq -1$, $c \geq 1$ e $f(b) = f(c)$? Xustifique a súa resposta.

2. **A.** Enunciado da Regra de L'Hopital.

B. Calcule a relación entre a e b para que sexa continua en toda a recta real a función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{2x} & \text{se } x \neq 0 \\ b & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque só aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. **A.** Definición de cota superior dunha sucesión de números reais. Definición de sucesión acotada inferiormente.

B. Demostre que a sucesión de termo xeral $a_n = \frac{4n-1}{n+1}$ é crecente e ache unha cota inferior positiva (xustificando que é cota inferior.)

2. **A.** Explique **BREVEMENTE** o método de integración de funcións racionais $P(x)/Q(x)$, no caso de que o polinomio do denominador, $Q(x)$, teña só raíces reais.

B. Calcule $\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx$.

Bloque 4.b. (Estatística) (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque só aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. **A.** Propiedades da función de densidade dunha variable aleatoria que segue unha distribución normal.

B. Se X é unha variable aleatoria normal de media $\mu > 0$ e varianza σ^2 entón $P\left(\frac{\mu}{2} \leq X \leq \frac{3\mu}{2}\right)$ vale:

a) cero

b) $2P\left(Z \leq \frac{\mu}{2\sigma}\right) - 1$, donde Z é unha variable aleatoria que segue unha distribución $N(0,1)$.

c) ningunha das anteriores.

Elixa unha das tres respostas xustificando a súa elección.

2. **A.** A media dunha variable aleatoria pode ser negativa:

(a) Nunca (b) Sempre (c) Só se as probabilidades son negativas (d) Ningunha das anteriores.

Escolla unha das anteriores respostas e razoe por que as outras tres opcións non son correctas.

B. Se X é unha variable aleatoria discreta de media m , demostre, (empregando a definición de media) que a media da variable aleatoria discreta Y , con $Y = a + bX$, (para calesqueira $a, b \in \mathbf{R}$) é $a + bm$.

MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte **tódolos** alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álgebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Bloque 1 (Álgebra Lineal) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. Resolva a ecuación matricial: $A \cdot X + C = B$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Discuta e resolva, segundo os valores do parámetro α , o seguinte sistema de ecuacións. Interpreteo xeométricamente en cada caso:

$$2x - 3y + z = 0$$

$$x - \alpha y - 3z = 0$$

$$5x + 3y - z = 0$$

Bloque 2 (Xeometría) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. **A.** ¿Que condición deben cumprir os coeficientes das ecuacións xerais de dous planos para que estes sexan perpendiculares?

B. Ache o ángulo que forman os planos $\pi : 2x - y + z - 7 = 0$ e $\sigma : x + y + 2z = 11$.

2. **A.** Definición de produto mixto de tres vectores. ¿Pode ocorrer que o produto mixto de tres vectores sexa cero sen ser ningún dos vectores o vector nulo? Razoe a resposta.

B. Para \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , tres vectores no espacio tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 5$, ache os valores mínimo e máximo do valor absoluto do seu produto mixto.

Bloque 3 (Análise) (Responda a unha das dúas preguntas)

1. **A.** Continuidade lateral dunha función nun punto.

B. Analice a continuidade, no punto $x = 0$, da función f dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

2. **A.** Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para funcións continuas.

B. Sexa $F(x) = \int_0^x \text{sen}(t^2) dt$. Calcule a segunda derivada da función F (**sen intentar resolver a integral.**)

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque só aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. Calcule:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 5n + 4} - n)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 8}{2^{n+1}} \right)$

2. Calcule $\int \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 3} dx$.

Bloque 4.b. (Estatística) (Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque só aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)

1. Tódolos días se seleccionan, de maneira aleatoria, 15 unidades dun proceso de taponado de botellas co propósito de verificar a porcentaxe de taponados defectuosos. A xerencia decidiu deter o proceso cada vez que unha mostra de 15 unidades teña dous ou máis defectuosos. Se se sabe que a probabilidade de realizar un taponado defectuoso é p , ¿cal é a probabilidade de que, un determinado día, o proceso se deteña? (O resultado debe expresalo en función de p .)

Se $p = 0.1$, ¿é máis probable que nunha caixa non haxa ningún defectuoso ou que sexan todos defectuosos? Xustifique a súa resposta.

2. Un distribuidor de cristalerías empaqueta as copas en lotes de catro copas cada un. A función de masa de probabilidade do número de copas defectuosas en cada lote vén dada por:

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0.9	m	0.02	0.01	0.005

Pídese:

- a) Calcule o valor de m .
- b) Calcule a media da variable X.
- c) Calcule a probabilidade de que polo menos o 50% das copas dun lote sexa defectuoso.